Mathe: Einführung ganzrationaler Funktion **Datum:** ________

Name: ____________________ **Klasse:** ________

Information

Polynomfunktionen höheren Grades

Funktionen wie z. B. f mit $f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 7x + 5$ heißen **ganzrationale Funktionen**. Die Hochzahl der größten Potenz von x heißt **Grad der ganzrationalen Funktion**, bei f(x) also 3. Die Zahlen 2; −8; 7 und 5 vor den Potenzen von x bezeichnet man als **Koeffizienten**. Der Koeffizient ohne x, d. h. der Koeffizient vor x^0, hier also die Zahl 5, heißt **Absolutglied**.

Ganzrationale Funktionen vom **Grad 1** sind die linearen Funktionen,
die ganzrationalen Funktionen vom **Grad 2** sind die quadratischen Funktionen.
Konstante Funktionen f mit $f(x) = a,\ a \neq 0$ haben den **Grad 0**, da $a = a \cdot x^0$.
Der Nullfunktion f mit $f(x) = 0$ (für alle reellen x) wird kein Grad zugeordnet.
Die maximale Definitionsmenge einer ganzrationalen Funktion ist $\mathbb{R}$.

Auch eine Funktion f mit $f(x) = 2x(4x - 5)(x^2 + 3)$ ist eine ganzrationale Funktion.
Multipliziert man die Klammer aus, so ist $2x(4x - 5)(x^2 + 3) = 8x^4 - 10x^3 + 24x^2 - 30x$.
Die Terme ganzrationaler Funktionen werden **Polynome** genannt.
Man bezeichnet ganzrationale Funktionen daher auch als **Polynomfunktionen**.

Der Funktionsterms der Funktion hilft sich ein ungefähres Bild vom Verlauf des Schaubilds einer Polynomfunktion zu machen. Dazu untersucht man, wie sich die Funktion für sehr große und sehr kleine Werte von x verhält.

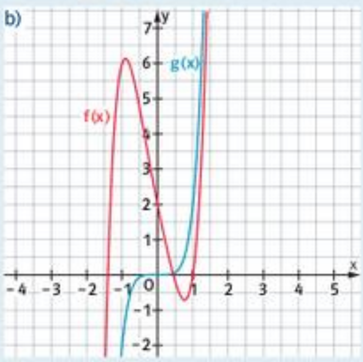
Merke

Eine Funktion f, deren Funktionsgleichung man in der Form
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ schreiben kann,
heißt ganzrationale Funktion vom Grad n oder **Polynomfunktion vom Grad n.** Dabei ist n eine natürliche Zahl und $a_0; a_1; \ldots; a_n$ sind reelle Zahlen ($a_n \neq 0$).

Verhalten für $x \to +\infty$ und Verhalten für $x \to -\infty$:
Für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ wird das Verhalten einer ganzrationalen Funktion vom Summanden mit der größten Hochzahl bestimmt. Für sehr große positive Zahlen, d. h. für $x \to +\infty$, bzw. sehr kleine negative Zahlen, d. h. für $x \to -\infty$, dominiert die höchste Potenz.
Das Schaubild der Polynomfunktion f verhält sich wie das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = a_n x^n$, wobei n der Grad von f und der Grad von g ist, man sagt: $a_n x^n$ ist der **dominierende Term** der Funktion f (x).

Beispiel

1 Eigenschaften des Schaubilds einer Polynomfunktion untersuchen
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^5 + x^2 - 5x + 2$.
a) Wie verhält sich das Schaubild von f für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$?
b) Zeichnen Sie das Schaubild von f sowie die Schaubilder der Vergleichsfunktion für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ in ein Koordinatensystem.



Lösung:
a) Für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ verhält sich das Schaubild von f so wie das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2x^5$. Damit strebt das Schaubild von f für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ und für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$.

2 Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften angeben
Geben Sie zwei Polynomfunktionen an, deren Schaubild sich für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ wie das Schaubild von $g(x) = -5x^4$ verhält.
Lösung:
Es gibt unendlich viele Lösungen. Alle Lösungen können durch
$f(x) = -5x^4 + a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + cx + d$ mit a, b, c und $d \in \mathbb{R}$ beschrieben werden, da $-5x^4$ der dominierende Summand ist. Beispiele sind
$f(x) = -5x^4 + 3x - 1$; $f(x) = -5x^4 + 7x^3 + 2x + 3$; $f(x) = -5x^4 - 4x^3 + 0{,}5x^2 - 1$.